Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Физический факультет

217 группа

Хайруллин Бари Рустамович

Курсовая работа

Двумерная гравитация Джакива - Тейтельбойма в метрическом виде

Руководитель курсовой работы
К. Б. Алкалаев, ОТФ ФИАН
«15» мая 2020 г.

Москва, 2020 г.

1 Введение

Построение теории гравитации в двумерном пространстве-времени представляет собой особый интерес, связанный с геометрическими особенностями двумерия. Действие Гильберта-Эйнштейна оказывается топологическим инвариантом, что означает необходимость в поиске нового подхода к построению теории. Таким оказывается введение дилатона - скалярного поля, влияющего на действие. Третий и четвёртый разделы посвящены поиску уравнений движения, следующих из действия Джакива-Тейтельбойма, содержащего дилатон.

2 Тензор Эйнштейна-Гильберта

Теория гравитации Эйнштейна, базирующаяся на действии

$$I_E = I_m + \int d^4x\sqrt{-g}(R-\Lambda), \tag{1}$$

не является применимой на многообразиях размерностей меньше трёх. Проиллюстрируем данное утверждение на анализе уравнения Гильберта-Эйнштейна в двумерном пространстве-времени:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{2}$$

Тензор Римана обладает следующими симметриями:

$$\begin{cases} R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}, \\ R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}, \\ R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}, \end{cases} \tag{3}$$

т.е. данный тензор антисимметричен по первым двум индексам, антисимметричен по последним двум индексам, а также симметричен относительно перестановки пары первых двух индексов со второй парой индексов. В таком случае, данный тензор пропорционален произведению двух символов Леви-Чивиты:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = k\epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

где $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$, $\epsilon_{12} = +1$. Нахождение множителя пропорциональности сводится к двойному сворачиванию тензора Римана с метрическим тензором:

$$\begin{gathered} R \overset{def}{=} g^{\nu\beta}g^{\mu\alpha}R_{\mu\nu\alpha\beta} = g^{\nu\beta}g^{\mu\alpha}k\epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{2}{g}k, \\ g \overset{def}{=} \det(g_{\mu\nu}), \end{gathered} \tag{5}$$

откуда сразу же выражается множитель пропорциональности:

$$k = \frac{R}{2}g. \tag{6}$$

Далее непосредственной подстановкой индексов находим:

$$g\epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}. \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в (4), а также сворачивая результат с метрическим тензором, для тензора Риччи получаем:

$$R_{\nu\beta} = g^{\mu\alpha}R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) = \frac{1}{2}Rg_{\nu\beta}. \tag{8}$$

Таким образом, тензор Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} \overset{def}{=} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \equiv 0, \tag{9}$$

что означает невозможность использования данной теории для анализа гравитации на двумерном многообразии пространства-времени.

3 Действие Джакива-Тейтельбойма

Решением данной проблемы может стать рассмотрение действия Джакива-Тейтельбойма:

$$I = \int d^2x\sqrt{-g}(R-\Lambda)\eta, \tag{10}$$

предлагаемое в [1]. Здесь η - некоторое скалярное поле, зависящее от точки многообразия. Как будет показано далее, данное поле может иметь лишь определённый с точностью до конечного набора констант вид.

4 Получение уравнений движения

Вариация по скалярному полю даёт первое условие выполнения принципа наименьшего действия:

$$R - \Lambda = 0. \tag{11}$$

Теперь проварьируем действие по метрике:

$$\begin{aligned} \delta_g \int d^2x\sqrt{-g}(R-\Lambda)\eta &= \int d^2x\left\{\delta\sqrt{-g}\cdot(R-\Lambda) + \sqrt{-g}\cdot\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})\right\}\eta = \\ &= \int d^2x\left\{\delta\sqrt{-g}\cdot(R-\Lambda) + \sqrt{-g}\cdot\ (g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})\right\}\eta. \end{aligned} \tag{12}$$

Проварьируем определитель метрики, исходя из определения:

$$\begin{cases} \delta g = \delta\left[g_{11}g_{22} - (g_{12})^2\right] = g_{22}\delta g_{11} + g_{11}\delta g_{22} - 2g_{12}\delta g_{12}, \\ g_{22} = gg^{11}, g_{11} = gg^{22}, g_{12} = -gg^{12}. \end{cases} \tag{13}$$

Из данной системы получаем, что

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \tag{14}$$

Формулу для поднятия индексов при $\delta g_{\mu\nu}$ можно получить из следующего соотношения:

$$\delta(\delta^{\alpha}_{\beta}) = \delta(g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta}) = g^{\alpha\mu}\delta g_{\mu\beta} + g_{\mu\beta}\delta g^{\alpha\mu} = 0 \mid \cdot\, g_{\alpha\nu}, \tag{15}$$

$$\delta g_{\nu\beta} = -g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} \delta g^{\alpha\mu}. \tag{16}$$

Таким образом,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{17}$$

Связность Леви-Чивиты (то есть связность, при которой отсутствует кручение и относительно которой метрический тензор ковариантно постоянен) позволяет из метрики однозначно определить символы Кристоффеля $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ и операцию взятия ковариантной производной ∇_{λ}.

Чтобы найти вариацию тензора Риччи, необходимо найти вариацию символов Кристоффеля:

$$\begin{cases} \nabla_{\lambda}\delta g_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\delta g_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\delta g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\delta g_{\alpha\mu}, \\ \delta(\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu}) = \delta(\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} g_{\alpha\mu}). \end{cases} \tag{18}$$

Оба уравнения данной системы были получены из определения ковариантной производной тензора типа (0, 2). Они не тавтологичны друг другу, так как операции варьирования и взятия ковариантной производной не коммутируют. Вместе с тем, вариация коммутирует с частной производной, благодаря чему мы можем из второго уравнения системы выразить $\partial_{\lambda}\delta g_{\mu\nu}$:

$$\partial_{\lambda}\delta g_{\mu\nu} = \delta(\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu}) + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\delta g_{\alpha\nu} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} g_{\alpha\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\delta g_{\alpha\mu} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} g_{\alpha\mu}. \tag{19}$$

Первое слагаемое в выражении равно нулю из-за ковариантной постоянности метрического тензора. Подставляя (19) в первое уравнение (18), запишем полученное уравнение, трижды переобозначив индексы:

$$\begin{cases} \nabla_{\lambda}\delta g_{\mu\nu} = g_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} + g_{\alpha\mu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}, \\ \nabla_{\mu}\delta g_{\nu\lambda} = g_{\alpha\lambda}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}, \\ \nabla_{\nu}\delta g_{\lambda\mu} = g_{\alpha\mu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} + g_{\alpha\lambda}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}. \end{cases} \tag{20}$$

Условие отсутствия кручения позволяет установить симметричность символов Кристоффеля по двум нижним индексам. Складывая первые два уравнения системы и вычитая третье, находим:

$$\nabla_{\nu}\delta g_{\lambda\mu} + \nabla_{\mu}\delta g_{\nu\lambda} - \nabla_{\lambda}\delta g_{\mu\nu} = 2 g_{\alpha\lambda}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}. \tag{21}$$

Свёрткой с метрическим тензором типа (2, 0) получаем искомое выражение для вариации символов Кристоффеля:

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left\{\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\beta} + \nabla_{\mu}\delta g_{\nu\beta} - \nabla_{\beta}\delta g_{\mu\nu}\right\}. \tag{22}$$

Теперь мы готовы найти вариацию тензора Римана, исходя из его определения [2]:

$$R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} \overset{def}{=} \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}. \tag{23}$$

Непосредственным его варьированием, а также взятием ковариантной производной от символов Кристоффеля, приходим к системе:

$$\begin{cases} \delta R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} = \partial_\beta \delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} - \partial_\nu \delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} - \delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}, \\ \partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \nabla_\nu \delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\beta}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}, \end{cases} \tag{24}$$

т.е.

$$\delta R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} = \nabla_\beta \delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}. \tag{25}$$

Таким образом, вариация тензора Риччи:

$$\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\beta \delta\Gamma^{\nu}_{\alpha\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \tag{26}$$

Подставляя (22) в (26) и сворачивая с метрическим тензором, получаем:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla^2)\delta g^{\mu\nu}. \tag{27}$$

Равенство (12) принимает вид

$$0 = \delta_g I = \int d^2x\sqrt{-g}\left\{\frac{\Lambda}{2}g_{\mu\nu} \underbrace{-\frac{R}{2}g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}}_{G_{\mu\nu}\equiv 0} + \nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla^2\right\}\eta\delta g^{\mu\nu}, \tag{28}$$

откуда сразу же получаем следующее уравнение:

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla^2 + \frac{\Lambda}{2}g_{\mu\nu})\eta = 0. \tag{29}$$

5 Анализ полученных уравнений

Так как действие Джакива-Тейтельбойма инвариантно относительно замены введённой системы координат, мы можем выбрать такую, в которой метрика примет конформно-плоский вид:

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}\exp 2\sigma, \tag{30}$$

где $h_{\mu\nu} = diag(1, -1)$ - метрика Минковского. Для данной метрики символы Кристоффеля принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \partial_1\sigma, \\ \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \partial_2\sigma. \end{aligned} \tag{31}$$

Непосредственной свёрткой метрического тензора с тензором Риччи, выраженным через символы Кристоффеля, из (11) получаем уравнения Лиувилля:

$$\Box\sigma = \frac{\Lambda}{2}\exp 2\sigma, \tag{32}$$

где $\Box = h^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu = \partial_1^2\sigma - \partial_2^2\sigma$. Его общее решение зависит от двух произвольных функций переменных $x^{\pm} = t \pm x$ [3]:

$$\exp 2\sigma = \frac{f'(x^-)g'(x^+)}{(1 - \frac{\Lambda}{8}fg)^2}. \tag{33}$$

Однако остаточная координатная инвариантность позволяет фиксировать данные функции $f = x^-$, $g = x^+$:

$$\exp 2\sigma = \left[1 - \frac{\Lambda}{8}(t^2 - x^2)\right]^{-2}. \tag{34}$$

Несложными преобразованиями (29) сводится к системе следующих уравнений:

$$(\nabla^2 - \Lambda)\eta = 0, \tag{35}$$

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^2)\eta = 0. \tag{36}$$

Обозначим $V_\mu \exp(2\sigma) = \partial_\mu\eta$. Учитывая, что ковариантная производная скалярного поля $\nabla_\mu\eta = \partial_\mu\eta$ сама по себе является ковекторным полем, (36) обретает следующий вид:

$$\nabla_\mu(V_\nu e^{2\sigma}) - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}\nabla_\alpha(V_\beta e^{2\sigma}) = 0. \tag{37}$$

Непосредственной подстановкой индексов приходим к тому, что данное уравнение есть дифференциальное уравнение Киллинга:

$$\begin{cases} \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 = 0, \\ \partial_1 V_2 + \partial_2 V_1 = 0. \end{cases} \tag{38}$$

Складывая и вычитая эти два уравнения, получаем, что

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{2}\left[F(x^-) + G(x+)\right], \\ \\ V_2 = \dfrac{1}{2}\left[F(x^-) - G(x^+)\right]. \end{cases}$$

где F и G - произвольные вещественные дифференцируемые функции. Найдём их вид из уравнения (35). Подстановкой найденных символов Кристоффеля, оно сводится к следующему виду:

$$\partial_1 V_1 - \partial_2 V_2 + 2(V_1\partial_1\sigma - V_2\partial_2\sigma) = \Lambda\eta. \tag{39}$$

Дифференцируя данное выражение сначала по одной координате, а затем по второй, мы получим систему из двух уравнений, содержащих лишь F, G и их производные. Решением такой системы будет следующая пара функций:

$$\begin{cases} F(t-x) = a_1 + a_2 + \dfrac{\Lambda\beta}{2}(t-x) + \dfrac{\Lambda(a_1 - a_2)}{8}(t-x)^2, \\ G(t+x) = a_1 - a_2 + \dfrac{\Lambda\beta}{2}(t+x) + \dfrac{\Lambda(a_1 + a_2)}{8}(t+x)^2, \end{cases} \tag{40}$$

где a_1, a_2, $\beta \in \mathbb{R}$ - константы. Скалярное поле принимает вид

$$\eta = \frac{a_\nu x^\nu + \beta \left[1 + \frac{\Lambda}{8}(t^2 - x^2)\right]}{1 - \frac{\Lambda}{8}(t^2 - x^2)}. \tag{41}$$

Как мы видим, в данной теории отсутствует функциональный произвол, то есть все функции определены с точностью до конечного набора констант.

6 Вывод

Четырёхмерная теория гравитации, изучающая геометрию пространства-времени, прекрасно описывает эксперименты. Однако, как мы можем заметить, она неоднородна относительно понижения размерности пространства до двух. Это связано именно с особенностями двумерной геометрии, однако существование проблемы ещё не опровергает возможность существования необходимой теории. Искусственно введённое скалярное поле (или дилатон) вовсе не оказывается случайной функцией точки многообразия, а имеет вполне определённый вид. Изучение двумерной гравитации позволяет приблизиться ко всё более общему пониманию такого явления природы, как гравитация, а также дарит новый взгляд в поиске решений существующих теоретических проблем.

Список литературы

[1] Jackiw R. Gauge theories on a line. Massachusets 02139 U.S.A.: Center for Theoretical Physics, Laboratory for Nuclear Science and Department of Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1992. 19 p.

[2] Дубровин Б. А. Новиков С. П. Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 760 с.

[3] Andrei D. Polyanin V. F. Z. Handbook of nonlinear partial differential equations. 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300: CRC Press, Taylor and Francis Group, 2012. 1878 p.